

Colle du 25/02 - Sujet 1
Continuité et dérivabilité et suites

Question de cours.

1. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n l'unique solution sur $[0; \frac{1}{2}]$ de $x^n + x^2 + 2x - 1 = 0$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 4$.

1. Justifier que telle suite existe et est unique.
2. Déterminer toutes les suites constantes solutions de l'équation de récurrence.
3. En déduire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x^2) = f(x).$$

1. Montrer que f est constante sur $[1; +\infty[$.
2. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Colle du 25/02 - Sujet 2
Continuité et dérivabilité et suites

Question de cours.

1. Définir la convergence d'une suite complexe
2. Démontrer que $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'(0)$.

Exercice 1. Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' \leq 0$. Montrer que f est positive sur $[0; 1]$.

Exercice 2. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{6} \left(4u_n^2 + \frac{1}{u_n} \right)$.

Colle du 25/02 - Sujet 3
Continuité et dérivabilité et suites

Question de cours.

1. Énoncer l'identité des accroissements finis.
2. On pose $u_0 = -\frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = x^2 \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. Déterminer si f est prolongeable par continuité et si le prolongement est dérivable.

Exercice 2. Étudier la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme la solution de l'équation $\ln(x) + x = n$. On commencera par justifier que la suite est bien définie de façon unique.